دانش حرفه‌ای

جای خالی ریاضی شاد

در برنامه‌های رسمی آموزش ریاضی ایران (۲)

هوشنگ شرقی
معلم ریاضی

اشاره

در قســمت اول ایــن مقاله، بــه تفصیل دربــارۀ ضرورت پرداختن به ریاضیات شــاد و نیز محتوا و تاریخچۀ آن نوشتیم و دلایــل اهمیت و نقش آن را در آموزش ریاضی شــرح دادیم. دیدیم که اهمیت موضوع در بسیاری از کشورهای توسعه‌یافته روشن شده است. بسیاری از ریاضی‌دانان جایگاه مهم آن را برای مسئولان آموزش‌وپرورش کشورشــان توضیح داده‌اند و عموماً کتاب و مقاله در راســتای اشاعۀ آن تألیف شده است. اکنون با این مقدمه، آمادگی داریــم که به محتوای این بحث، به‌صورت جزئی بپردازیم، اجزای ساختاری را که از آن به «ریاضیات شاد» یاد می‌کنیم، دقیق‌تر بشناســیم و با مثال‌هایی روشن، اهمیت پرداختن به آن‌ها را نشان دهیم.

کلیدواژه‌ها: ریاضی شاد، معماهای ریاضی، لطیفه‌های ریاضی، معماهای منطقی، پارادوکس، سفسطه، بازی‌های ریاضی

دیدیم که ریاضیات شــاد، شامل جلوه‌هایی از ریاضیات است که زیبایی‌های آن را بیشــتر و بهتر نمایان می‌کند. به‌علاوه، باعث علاقه‌مند شدن افراد و به‌خصوص دانش‌آموزان نوجوان و جوان به ریاضی می‌شــود و از این منظر جایگاه ویژه‌ای در آموزش ریاضی دارد. اکنون به جزئیات این مباحث می‌پردازیم. با یک تقسیم‌بندی، شاید بتوان مباحث متفاوت این ساختار را در چهار بخش به ترتیب زیر طبقه‌بندی کرد:

الف. خواندنی‌ها، فکاهیات، لطیفه‌ها و طنز ریاضی

جی. ای. لیتل وود[1] (۱۸۸۵ ـ ۱۹۹۷)، ریاضی‌دان معاصر انگلیســی، جمله‌ای معروف دارد: «یک لطیفۀ خوب ریاضی، از یک دو جین نوشته‌های به‌دردنخور ریاضی مفیدتر است!»

اگر با لطیفه‌های ریاضی آشــنایی کافی داشــته باشیم، باور می‌کنیم که در این جمله ذره‌ای اغراق و مبالغه‌گویی وجود ندارد. به راستی اگر هدف از ارائۀ یک متن ریاضی، آموزش ریاضی باشد، نوشته‌ای یکنواخت، خسته‌کننده و کسالت‌بار که انشایی سنگین داشــته و پر از اصطلاحات گیج‌کننده باشد، چه کاربردی می‌تواند داشته باشــد؟ اما یک لطیفۀ زیبا و سنجیده می‌تواند بار آموزشی مفیدی به همراه داشته باشد و نکاتی را بیاموزد که سال‌ها از ذهن آموزنده خارج نشود.

نگارنده شاهد بوده است، دانش‌آموزانی که هم‌نسل من بوده‌اند، دارای کمتریــن علاقه‌ای هم به ریاضیات نبوده‌اند و ســال‌ها هیچ ارتباطی با مفاهیم ریاضی نداشــته‌اند، چگونه پس از گذشت چند دهه از فراغت از تحصیل، هنوز ارتباط بین علامت «مبین» (دلتای) معادلۀ درجۀ دوم و تعداد ریشــه‌های آن را از این لطیفۀ قدیمی (و احتمالاً ساختۀ طنزپردازان وطنی) به یاد دارند:

«روزی یک معلم ریاضی به لبوفروش محله‌اش گفت: لطفاً یک کیلو لبو بدهید که دلتای آن منفی باشد!»

به‌خصوص اگر این لطیفه‌ها هدفمند و سنجیده ساخته شده باشــند (که البته کاری بسیار دشوار اســت، به مراتب سخت‌تر از نوشــتن یک مقاله!) می‌تواند آثار ماندگار آموزشی به جا بگذارد. به این نمونه توجه کنید:

«آمارداني شنیده بود که احتمال آنکه در یک هواپیما بمبی وجود داشته باشد، یک در میلیون است. پس با محاسبه‌ای ساده دریافت که احتمال وجود دو بمب در هواپیما، $\frac{1}{1000000}\times\frac{1}{1000000}$ یعنی یک تریلیونیم است. از آن به بعد، هر بار سوار هواپیما می‌شد، یک بمب با خود به هواپیما می‌برد!»

می‌بینید که در این لطیفۀ زیبــا، چه مفاهیم مهمی از بحث احتمال (همچون استقلال پیشــامدها و قانون ضرب احتمال) به چالش کشــیده شده و ذهن را درگیر می‌کنند. من هرگز فراموش نمی‌کنــم که وقتی این لطیفه را در یــک کتاب آمار و احتمال در دوران دانشــجویی‌ام خواندم، چگونه ذهنم درگیر چالش به ظاهر ســادۀ آن شد. اکنون به نمونه‌ای دیگر که آن هم به همین زیبایی است، توجه کنید:

«روزی دو ریاضی‌دان در رستورانی نشسته بودند و با هم بحث می‌کردند که آیا عامهٔ مردم به مفاهیم ریاضی دقت و توجه دارند یا خیر و با هم در این زمینه اختلاف نظر داشتند. ریاضی‌دان اول که معتقد بود مردم عادی با مفاهیم ریاضی بیگانه‌اند، به دوستش گفت: اجازه بده همین جا موضوع را آزمایش کنیم ... و پیشخدمت را صدا کرد و به او گفت: ببخشید آقا، ممکن است بگویید، $(a+b)^2$ مساوی چیست؟ و پیشخدمت گفت: a^2+b^2! و ریاضی‌دان نگاه معناداری به دوستش انداخت و پیشخدمت در ادامه گفت: البته به شرطی که a و b، ضد تعویض‌پذیر[۲] باشند!»

ملاحظه می‌کنید که در این لطیفه چالش زیبایی نهفته است. اگر متغیرهای a و b تعویض‌پذیر باشند، یعنی $ab=ba$، می‌توان نوشت: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. اما اگر ضدتعویض‌پذیر باشند، یعنی $ab=-ba$، آن‌گاه: $(a+b)^2=a^2+b^2$ و پیشخدمت درست می‌گفت. در واقع بیش از حد با ریاضیات آشنا بود! و این هم لطیفه‌ای مشابه:

«روزی دو ریاضی‌دان بحث مشابهی را در یک رستوران داشتند و بر سر این موضوع شرط‌بندی کردند. وقتی ریاضی‌دان اول به دستشویی رفت، دومی پیشخدمت را صدا زد و به او یک اسکناس داد و گفت هر وقت از تو چیزی پرسیدم، فقط بگو:

$$\frac{x^3}{3}!$$

و پیشخدمت پذیرفت و رفت. بعد از بازگشت ریاضی‌دان اول، دومی رو به او گفت: بیا امتحان کنیم و پیشخدمت را صدا زد و رو به او گفت: بگو ببینم، انتگرال x^2dx چه می‌شود؟ پیشخدمت فوراً گفت: $\frac{x^3}{3}$ و رفت. اما بلافاصله برگشت و رو به او گفت: البته به اضافهٔ یک مقدار ثابت!»

چنان‌که مشاهده می‌شود، اهمیت لطیفه‌های ریاضی در ایجاد انگیزه برای یادگیری، چنان است که صدها لطیفهٔ زیبا از این دست طراحی شده‌اند و می‌شوند. برای ملاحظهٔ چنین لطیفه‌هایی خوانندگان می‌توانند به کتاب «ریاضی شاد» (جلد اول و دوم) از این‌جانب و یا به آرشیو مجلهٔ ریاضی برهان متوسطهٔ ۲ (شماره‌های ۷۵ تا ۱۱۰) مراجعه کنند. با توجه به اهمیت و کارایی استفاده از این لطیفه‌ها، به معلمان ریاضی کشورمان در دوره‌های تحصیلی ابتدایی و متوسطه توصیه می‌کنم، به کمک ذوق و سلیقه‌شان، با طرح لطیفه‌های مناسب، آموزش ریاضی را جذاب‌تر و شیرین‌تر کنند؛ اگرچه کار آسانی نیست.

در خاتمه این را هم اضافه می‌کنم که در کشورهای توسعه‌یافته، اهمیت موضوع کاملاً احساس شده و طرح لطیفه در شاخه‌های گوناگون علمی به شدت و سرعت رواج یافته است. برای انبساط خاطر خوانندگان، به یک نمونه در زمینهٔ دانش شیمی اشاره می‌کنم:

«روزی دو اتم در حال قدم زدن بودند که یکی از آن‌ها ناگهان با نگرانی به دیگری گفت: فکر کنم چند تا از الکترون‌هایم در راه افتاده باشند! و دومی گفت: چرا این‌طور فکر می‌کنی؟ و اولی گفت: آخر خیلی احساس مثبت بودن می‌کنم!»

ب. معماهای ریاضی و منطقی

معما چیست؟ با نگاهی به فرهنگ‌ها و دایرةالمعارف‌ها، تعریف‌های گوناگونی برای واژهٔ «riddle» می‌یابیم که نزدیک‌ترین معادل برای مفهوم معما در زبان فارسی است. فصل مشترک همهٔ این تعریف‌ها را شاید بتوان در این جمله خلاصه کرد: «مسئله یا پرسشی که در قالبی گیج‌کننده و دشوار طراحی شود و پاسخ به آن نیازمند خلاقیت و هوش باشد.»

با این تعریف به نظر می‌رسد که همهٔ معماها به نوعی یک مسئلهٔ ریاضی یا منطق هستند. به تعبیر **ریموند اسمالین**، شاید همهٔ مسئله‌های ریاضی را بتوان به معما تبدیل کرد! اینجاست که اهمیت معماها در آموزش ریاضی معنایی تازه می‌یابد. معلوم می‌شود که کلام **مارتین گاردنر**، اصلاً اغراق‌آمیز نبوده است، هنگامی که در مقدمهٔ کتاب «معماهای توکیو» نوشتهٔ **کوبون فوجی مورا** (پازلیست معاصر ژاپنی) می‌نویسد: «لطفاً فرض را بر این نگذارید که سرگرمی و تفریح تنها کاربرد معماهاست. معماها راهی برای تدریس ریاضیات هستند. در واقع آن‌ها بهترین راه برای آموزش ریاضی هستند.»

فرد هویل، اخترشناس مشهور انگلیسی که به مدت ۲۰ سال در «کمبریج» ریاضی تدریس می‌کرد، در آخرین کتابش، «ده چهره از کیهان»، می‌گوید: «باور قطعی‌ام این است که ریاضیات را هرگز نباید در کل تدریس کرد و دانشجویان باید خودشان آن را بیاموزند؛ اما چگونه؟ با حل کردن معماها. وظایف معلم‌ها باید این‌ها باشد: ابتدا انتخاب مواد آموزشی که معماها بر آن‌ها بنا می‌شوند، در مسیری آگاهانه. دوم اطمینان از اینکه معماها به لحاظ دشواری و جذابیت برای دانش‌آموز مناسب هستند. و سوم اینکه اگر معلم بر آن مسلط است، به دانش‌آموزان برای پاسخ دادن فرصت تنفس و تفکر بدهد.»

به لحاظ تاریخی هم موارد بسیاری در زندگی ریاضی‌دانان بزرگ وجود داشته است که با ملاحظهٔ یک معمای زیبا و موفقیت در حل آن، به ریاضیات علاقه‌مند شده‌اند. در مقابل کسانی هم بوده‌اند که با وجود داشتن استعداد ریاضی، به دلیل نبود شرایط مشابه، از آن بیزار شده‌اند. به یک نمونهٔ موفق اشاره می‌کنیم:

بنجامین فرانکلین فینکل (۱۹۴۷ ـ ۱۸۶۵) استاد ریاضی و بنیان‌گذار مجلهٔ مشهور «mathematical mounthly» بود. فینکل خود در مورد علاقه‌مند شدنش به ریاضیات می‌گوید: «وقتی ۱۵ سال داشتم و در یک مدرسهٔ معمولی دولتی درس می‌خواندم، بعضی مسائل ریاضی بودند که بین مردم عادی مطرح و به‌صورت سینه به سینه نقل محافل می‌شدند. یکی از این مسائل را برادرم در میان جمعی از مشتریان یک خواربارفروشی روستای محل اقامت ما شنیده بود و آن را برای فکر کردن به من داد. مسئله این بود:

توپی به قطر ۱۲ فوت، روی میله‌ای به ارتفاع ۶۰ فوت نصب شده است. مردی که فاصلهٔ چشمان تا نوک پاهایش ۶ فوت است،

روی توپ ایستاده است. مقدار سطحی از زمین که زیر توپ قرار گرفته و مرد نمی‌تواند ببیند، چقدر است؟

من این مسئله را پیش معلمم بردم و او گفت که برای حل آن به اطلاعات هندسی نیاز است که در کتاب‌های شما مطرح نشده‌اند. اما من تلاش کردم به کمک روش‌های اندازه‌گیری که در کتابی خوانده بودم، این مسئله را حل کنم و بالاخره چند سال بعد موفق به حل آن شدم. اما این مسئله به من انگیزه داد تا نه‌تنها ریاضیات را دنبال کنم، بلکه مجله‌ای منتشر کنم که در آن مجموعه‌ای از این‌گونه مسائل در شاخه‌های گوناگون ریاضی مطرح شده باشد.»

چنان‌که ملاحظه می‌شود، مسئله‌های ریاضی، هنگامی که در قالب معما ارائه می‌شوند، جذابیت مضاعف می‌یابند. فقط به قول فرد هویل، مباحث درسی و معماها باید آگاهانه انتخاب شده باشند، در سطح توانایی دانش‌آموزان باشند و فرصت کافی برای تفکر روی آن‌ها داده شده باشد. برای نمایش درستی این ادعا، معماهایی از شاخه‌های گوناگون ریاضی را در ادامه می‌آوریم:

۱. معادله‌ها و نامعادله‌های جبری

مدل‌سازی ریاضی اهمیت خاصی در آموزش ریاضی دبیرستانی دارد. معماهای زیبایی که راه‌حل آن‌ها به تشکیل معادله و نامعادله و یا دستگاه‌های معادلات منجر می‌شود، هم باعث تهییج دانش‌آموزان و انگیزش آنان برای یادگیری ریاضی می‌شوند، و هم مثال‌هایی مناسب برای توانمند کردن آنان در انجام مدل‌سازی هستند. متأسفانه نگارنده در کتاب‌های درسی و کمک‌درسی ریاضی کشورمان کمتر به نمونه‌های مناسبی در این زمینه برخورده است و به نظر می‌رسد که مؤلفان کتاب‌ها حوصلهٔ لازم را برای جست‌وجو و یا طرح مثال‌های مناسب به خرج نمی‌دهند. حال آنکه با کمی کاوش در کتاب‌های معما و سرگرمی به زبان‌های خارجی که برخی هم ترجمه شده‌اند، می‌توان به مثال‌های بسیار زیبایی دست یافت. در ادامه به چند نمونه اشاره می‌کنیم:

● در کارگاه صحافی ۹۲ برگ کاغذ سفید و ۱۳۵ برگ کاغذ رنگی وجود داشت و برای صحافی هر کتاب، یک برگ کاغذ سفید و یک برگ کاغذ رنگی لازم بود. بعد از اینکه چند کتاب صحافی شد، تعداد برگ‌های سفید باقی‌مانده، نصف تعداد برگ‌های رنگی بود. چند کتاب صحافی شده است؟ (منبع: المپیاد ریاضی لنینگراد)

توضیح: با فرض اینکه x کتاب صحافی شده باشد، معادلهٔ $۹۲-x=\frac{۱۳۵-x}{۲}$ نتیجه می‌شود و از آنجا: x=۴۹.

● مربی کودکستان ۶۰ عدد شکلات را بین تعدادی دانش‌آموز تقسیم کرد و به هرکدام به تساوی چند شکلات رسید. اما قبل از استفادهٔ آن‌ها، ۵ دانش‌آموز جدید وارد شدند و در نتیجه مربی دوباره شکلات‌ها را بین همه به تساوی تقسیم کرد و در نتیجه سهم هر دانش‌آموز یک شکلات کمتر شد. دانش‌آموزان چند نفر بودند؟

توضیح: معادلهٔ $\frac{۶۰}{x}-۱=\frac{۶۰}{x+۵}$ پاسخ‌گو است.

● لاستیک‌های جلوی خودرو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های عقب بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر، ساییده می‌شوند. چه موقع باید جای لاستیک‌های عقب و جلو را عوض کنیم تا با هم در یک زمان ساییده شوند؟ (منبع: المپیاد ریاضی لنینگراد)

توضیح: این یک مثال کاربردی بسیار زیباست. اگر فرض کنیم چرخ A، x کیلومتر در عقب و y کیلومتر در جلو حرکت کند، طبیعی است که چرخ B، x کیلومتر در جلو و y کیلومتر در عقب حرکت می‌کند و با توجه به نسبت ساییدگی لاستیک‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{x}{۱۵۰۰۰}+\frac{y}{۲۵۰۰۰}=۱\\\frac{x}{۲۵۰۰۰}+\frac{y}{۱۵۰۰۰}=۱\end{cases}$$

و از آنجا: x=y=۹۳۷۵

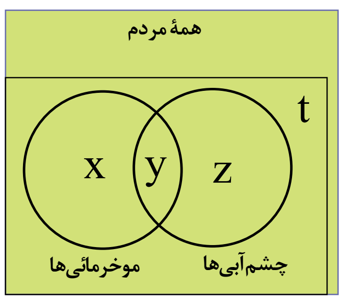
یعنی پس از ۹۳۷۵ کیلومتر حرکت، باید جای لاستیک‌ها عوض شود.

● می‌دانیم درصد موخرمایی‌ها بین چشم‌آبی‌ها، بیشتر از درصد موخرمایی‌ها بین همهٔ مردم است. کدام بیشتر است: درصد چشم‌آبی‌ها بین موخرمایی‌ها، یا درصد چشم‌آبی‌ها بین همهٔ مردم؟ (منبع: آمادگی برای المپیاد ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری)

توضیح: این هم مثالی زیبا در زمینهٔ مدل‌سازی و نیز نامساوی‌هاست.

با توجه به نمودار زیر، طبق فرض داریم:

$$\frac{y}{y+z}>\frac{x+y}{x+y+z+t}$$



و از آنجا به سادگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{y}{x+y}>\frac{y+z}{x+y+z+t}$$

یعنی درصد چشم‌آبی‌ها بین موخرمایی‌ها بیشتر از درصد چشم‌آبی‌ها بین همهٔ مردم است.

● سه برادر وارد باغی شدند و ۲۴ عدد سیب چیدند. هنگام تقسیم متوجه نکتهٔ جالبی شدند. به هر برادر به اندازهٔ سن او سیب دادند و سیب‌ها تمام شدند! بعد برادر کوچک نصف سیب‌هایش را برای خودش برداشت و نصف دیگر را به تساوی بین دو برادر بزرگش

تقسیم کرد. سپس برادر وسطی همین کار را کرد و بعد برادر بزرگ‌تر هم همین کار را تکرار کرد و حالا سهم هر سه برادر مساوی شد! سن برادرها چقدر است؟

توضیح: اگر مسئله را با مدل‌سازی ریاضی حل کنیم، سن برادرها را از کوچک به بزرگ، x، y و z در نظر می‌گیریم ($x+y+z=۲۴$) و سهم برادرها در سه مرحلهٔ متوالی مطابق جدول زیر خواهد بود:

مرحله	برادر کوچک	برادر وسطی	برادر بزرگ
۱	$\frac{x}{۲}$	$\frac{x}{۴}+y$	$\frac{x}{۴}+z$
۲	$\frac{x}{۲}+\frac{x+۴y}{۱۶}$	$\frac{x+۴y}{۸}$	$\frac{x}{۴}+z+\frac{x+۴y}{۱۶}=\frac{۵x+۴y+۱۶z}{۱۶}$
۳	$\frac{۴۱x+۲۰y+۱۶z}{۶۴}$	$\frac{۱۳x+۳۶y+۱۶z}{۶۴}$	$\frac{۵x+۴y+۱۶z}{۳۲}$

و با توجه به فرض داریم:

$$\frac{۴۱x+۲۰y+۱۶z}{۶۴}=\frac{۱۳x+۳۶y+۱۶z}{۶۴}=\frac{۵x+۴y+۱۶z}{۳۲}$$

و $x+y+z=۲۴$ و از آنجا نتیجه می‌شود: $z=۱۳$ و $y=۷$ و $x=۴$.

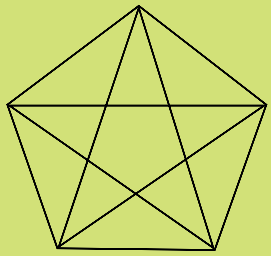
اما راه‌حل بسیار ساده‌تری هم وجود دارد: از آخر به اول باز می‌گردیم!

در مرحلهٔ آخر، معلوم است که هریک از برادرها ۸ سیب دارند، پس برادر بزرگ‌تر در مرحلهٔ ماقبل آخر، ۱۶ سیب داشته است و ۸ سیب را به تساوی (به هر نفر ۴ سیب) به دو برادر دیگر داده است. سپس برادرها، به ترتیب سن، ۴، ۴ و ۱۶ سیب داشته‌اند. در مرحلهٔ قبل از آن، برادر وسط ۸ سیب داشته و ۴ تای آن‌ها را بین دو برادر دیگر تقسیم کرده است، سپس ... و به همین ترتیب به جواب اولیهٔ ۴، ۷ و ۱۳ می‌رسیم. این مثالی بسیار خوب، هم برای مدل‌سازی و هم برای تفکر خلاق ریاضی است.

۲. ترکیبیات

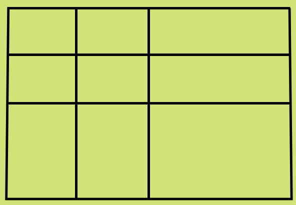
ترکیبیات از شاخه‌های بسیار مورد تأکید در آموزش نوین ریاضی است. معماهای متعدد و بسیار زیبایی در این زمینه وجود دارند که به نمونه‌هایی از آن‌ها اشاره‌ای گذرا می‌کنیم:

- تمام نقاط روی تخته را با دو رنگ قرمز و آبی به تصادف و بی‌قاعده رنگ زده‌ایم. نشان دهید می‌توان پاره‌خطی به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم کرد که دو سر آن هم‌رنگ باشند.
- در یک گروه ۱۴۰۰ نفری از افراد، در هر دستهٔ ۴ نفری دلخواه، لااقل یک نفر وجود دارد که سه نفر دیگر را می‌شناسد. حداقل چند نفر در این گروه وجود دارند که همهٔ دیگران را می‌شناسند؟ (رابطهٔ شناسایی دوطرفه است).
- اگر بدانیم هر مهرهٔ دومینو، دو خانهٔ مجاور در صفحهٔ شطرنج را می‌پوشاند، آیا می‌توان با ۳۱ مهرهٔ دومینو، ۶۲ خانهٔ صفحهٔ شطرنج را طوری پوشاند که دو خانهٔ دو گوشهٔ مقابل هم خالی بمانند؟
- در شکل ۱ چند مثلث می‌توان شمرد؟



شکل ۱

- در شکل ۲ چند مستطیل می‌توان شمرد؟



شکل ۲

۳. تئوری گراف

چنان‌که می‌دانیم، تئوری گراف‌ها اساساً برای حل یک معما تولد یافت! مسئلهٔ (معمای) پل‌های «کونیگسبرگ» که امروزه تقریباً هر دانش‌آموختهٔ رشتهٔ ریاضی با آن آشنایی دارد. اما پس از آن ده‌ها معما و مسئلهٔ بسیار زیبا و جذاب برای عموم، مانند مسئلهٔ معروف «عبور دادن روباه، کلم و خرگوش از رودخانه»، و مسئلهٔ «شوهران حسود» که اغلب در میان عموم معروف‌اند، مطرح شدند و کارآمدی تئوری گراف‌ها برای ریاضی‌ورزان بیش از پیش آشکار شد. آشنا کردن نوجوانان با تئوری گراف و کاربردهای آن می‌تواند در علاقه‌مند کردن آنان به ریاضیات بسیار مؤثر باشد؛ به‌خصوص اگر همراه با طرح معماهایی جذاب باشد. به چند نمونه توجه کنید:

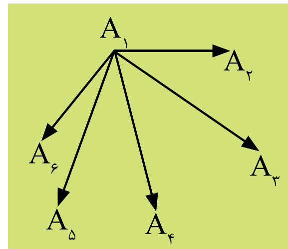
- شش دانش‌آموز و تعدادی معلم در دو طرف یک میز مستطیل‌شکل بزرگ نشسته‌اند و یک سینی شامل ۳۰ عدد شیرینی روی میز است. هر دانش‌آموز یک شیرینی به معلم خودش، و هر معلم یک شیرینی به دانش‌آموزانی که شاگرد خودش نیستند، می‌دهد. در آخر کار سینی خالی می‌شود. چند معلم آنجا بودند؟

این مسئله را می‌توان به روش‌های گوناگونی حل کرد، اما یک الگوی گرافیکی، درک آن را بسیار آسان می‌کند. اگر هر معلم و دانش‌آموز را با رأس‌های یک گراف متناظر کنیم، در واقع با یک گراف دو پارچه[۳] سروکار داریم. می‌دانیم مجموعهٔ رأس‌های یک گراف دو پارچه، از دو مجموعهٔ جدا از هم تشکیل می‌شود که هر یک از رأس‌های مجموعهٔ اول، با تمام رأس‌های مجموعهٔ دوم مرتبط است. حال اگر مجموعهٔ A را مجموعهٔ دانش‌آموزان و مجموعهٔ B را مجموعهٔ معلمان در نظر بگیریم، چون هر معلم به دانش‌آموزانی که شاگردش نیستند و هر دانش‌آموز به هر عضو B که معلمش است، یک شیرینی می‌دهند، پس هر عضو A به ترتیبی، با تمام اعضای B مرتبط، و هر یال این گراف با یک شیرینی متناظر می‌شود. اما اندازهٔ (تعداد یال‌های) گراف دو پارچه برابر است با: $n(A).n(B)$. پس

$6n(B)=30$ و $n(B)=5$. یعنی ۵ معلم هستند.

● ثابت کنید در هر جمع شش‌نفره از افراد، همیشه سه نفر وجود دارند که یا دو به دو با هم آشنا هستند و یا دو به دو ناآشنا هستند.

این مسئله‌ای بسیار قدیمی و مشهور است که مستقیماً با الگوی گرافیکی زیر قابل حل است.



اگر هر یک از شش نفر را با یک رأس از گراف G متناظر کنیم، می‌توانیم G را یک گراف کامل مرتبهٔ ۶ در نظر بگیریم که یال‌های آن با دو رنگ متفاوت (مثلاً قرمز و آبی) رنگ شده‌اند. از یکی از رنگ‌ها (مثلاً آبی) برای آشنایی و از دیگری برای ناآشنایی استفاده می‌شود. پس هر دو رأس دلخواه G با یالی از یکی از دو رنگ، به هم وصل می‌شوند. اکنون رأسی دلخواه (مثلاً A_1) را در نظر می‌گیریم. از این رأس ۵ یال در دو رنگ متفاوت خارج شده‌اند. پس لااقل ۳ تا از این یال‌ها، از یک رنگ، مثلاً آبی، هستند (در گراف بالا یال‌های A_1A_6، A_1A_4 و A_1A_5).

حال رأس‌هایی را که این سه یال به آن‌ها وصل هستند، در نظر بگیرید (A_4، A_5 و A_6). اگر یکی از سه یال بین این رأس‌ها (A_4A_5، A_4A_6 و A_5A_6) آبی‌رنگ باشد، در این صورت یک مثلث با ضلع‌های آبی خواهیم داشت و لذا سه نفر داریم که دو به دو با هم آشنا هستند. اگر هم هیچ‌یک از این یال‌ها آبی‌رنگ نباشند، یک مثلث با ضلع‌های قرمزرنگ ($A_4A_5A_6$) داریم و یعنی سه نفر هستند که دو به دو ناآشنا هستند و اثبات تمام است.

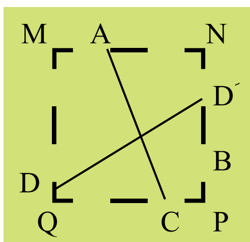
برای ملاحظهٔ مجموعه‌ای از مثال‌های گوناگون از این دست، به مقاله‌ای از نگارنده، با عنوان «معماهایی با ماهیت ریاضی»، در شمارهٔ ۲۸ مجلهٔ ریاضی برهان دبیرستان (از انتشارات مدرسه، ویژهٔ بهار ۱۳۷۸) مراجعه کنید. در انتها بی‌مناسبت نیست که از پدر تئوری گراف ایران، استاد **مهدی بهزاد** هم یادی کنیم که در گسترش این تئوری در کشور ما سهمی بسزا دارند. ایشان با تألیف کتابی گران‌قدر در زمینهٔ کاربردهای تئوری گراف در حل مسائل عامه‌پسند و معمایی، کار خود را به راستی تکمیل کرد. این کتاب با عنوان «افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان» به‌صورت نمایشنامه و در سال ۱۳۹۰ منتشر شد که مطالعهٔ آن را به عموم خوانندگان توصیه می‌کنیم.

۴. هندسه

معماهای زیادی بر مبنای قضیه‌ها و ویژگی‌های شکل‌های هندسی وجود دارند که اتفاقاً جزو زیباترین معماها هستند. به نمونه‌هایی از آن‌ها در ادامه اشاره می‌شود، با این توضیح که معماهایی از این دست می‌توانند در آموزش مباحث هندسه بسیار مؤثر باشند.

● باغبانی زمین مربع‌شکل باغش را با کاشتن درخت‌هایی روی ضلع‌های آن محصور کرده است. اما بعد از گذشت زمانی که فرصت رسیدگی به زمینش را نداشت، وقتی به سر زمین آمد، مشاهده کرد که درختان اطراف زمین، همه به جز چهار درخت در چهار طرف (یعنی روی هر ضلع فقط یک درخت) از جا درآورده شده‌اند. اکنون او چگونه می‌تواند با استفاده از این چهار درخت دوباره ضلع‌های زمینش را مشخص کند؟

توضیح: مسئله فوق در واقع متناظر با این مسئلهٔ هندسی است. با داشتن چهار نقطه متمایز روی چهار ضلع یک مربع، چگونه می‌توان مربع را رسم کرد؟ این یک راه‌حل است. مطابق شکل زیر، اگر این چهار نقطهٔ A، B، C و D باشند، AC را می‌کشیم و از D عمودی بر آن رسم می‌کنیم و تا D' امتداد می‌دهیم؛ به‌طوری‌که: DD'=AC.

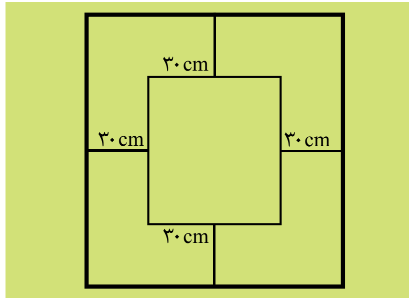


حال D' را به B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم (AN و CP). از D نیز موازی NP خطی رسم می‌کنیم تا امتدادهای AN وCP را در M و Q قطع کند. MNPQ مربع مطلوب است. علت درستی عمل را بررسی کنید.

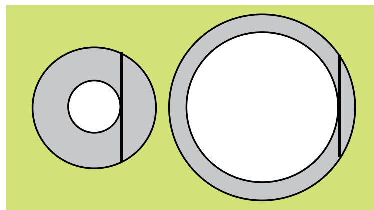
● یک قطعه کاغذ به ابعاد ۳/۶ و ۴/۸ سانتی‌متر را طوری تا زده‌ایم که رأس‌های مقابل آن بر هم منطبق شده‌اند. طول خط تا را بیابید. (منبع: المپیاد ریاضی برای همه، ترجمهٔ کاظم فائقی)

● می‌خواهیم یک میز مربعی به ضلع ۹۰ سانتی‌متر را با دو رومیزی دایره‌ای، هر کدام به قطر یک متر، بپوشانیم (بدون آنکه به رومیزی‌ها آسیبی بزنیم یا آن‌ها را برش بدهیم). آیا این کار ممکن است؟ (منبع: همان).

● مطابق شکل زیر، جزیره‌ای مربع‌شکل، در استخری مربع‌شکل محصور شده است و همهٔ ضلع‌های دو مربع موازی‌اند و فاصلهٔ آن‌ها از هر طرف مساوی ۳۰ متر است. دو تختهٔ بلند هریک به طول ۲۹ متر در اختیار داریم و هیچ وسیله‌ای هم برای اتصال آن‌ها به هم در اختیار نداریم. چگونه می‌توانیم فقط به کمک همین دو تخته چوب، خودمان را از بیرون به جزیره برسانیم؟ (برای ملاحظهٔ راه‌حل این مسئله و تعدادی معمای جالب دیگر، به هشت مقالهٔ این‌جانب، با عنوان «در کلاس درس آقای انسان‌دوست»، منتشر شده در مجلهٔ برهان متوسطه اول، دورهٔ ۹۷ ـ ۱۳۹۶، مراجعه کنید).

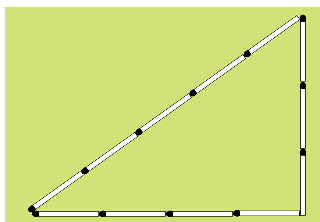


● در شکل زیر پاره‌خط‌هایی که بر دایره‌های داخلی مماس‌اند، هم‌طول هستند. کدام حلقه مساحت بیشتری دارد؟



توضیح: هم‌مساحت‌اند! (چرا؟)

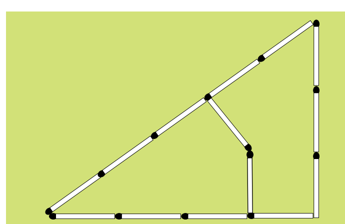
● در شـــکل زیر، با استفاده از ۱۲ عدد چوب کبریت یکسان، مثلث قائم‌الزاویهٔ معروف ۳ـ ۴ـ ۵ را ساخته‌ایم:



۱۲ عدد چوب کبریت

روشن است که مســـاحت این مثلث $\frac{۳\times۴}{۲}=۶$ واحد سطح است (طول هر چوب کبریت یک واحد و مساحت مربعی که هر ضلع آن یک چوب کبریت است، واحد سطح محسوب می‌شود). اکنون آیا می‌توانید با افزودن دو عدد چوب کبریت به این شکل، آن را به دو بخش معادل (هر یک ۳ واحد سطح) تفکیک کنید؟ آیا می‌توانید همین کار را با سه عدد چوب کبریت انجام دهید؟ با چهار تا چطور؟

توضیح: این معما را می‌توان برای دانش‌آموزان به‌طور عملی مطرح کرد و از آنان خواســـت آن را با ســـعی و خطا حل کنند. در نهایت راه‌حل را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

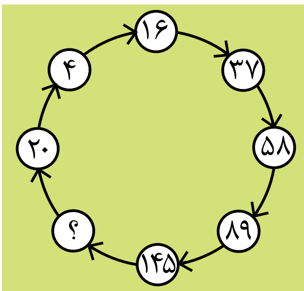


ســـپس از دانش‌آموزان می‌خواهیم دلیل برابری مساحت‌ها را توضیح دهند. در مورد افزودن ۳ چوب کبریت و بیشـــتر، مســـئلهٔ جالب‌تر می‌شود (منبع: معماهای توکیو از کوبون فوجی‌مورا)

۵. الگوها

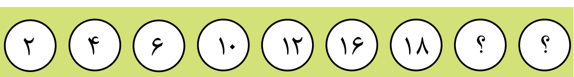
الگوهای عددی، از جملهٔ موضوع‌های درســـی هســـتند که در ســـال‌های متفاوت، از ابتدایی تا متوسطهٔ دوم، مورد توجه مؤلفان کتاب‌های درسی قرار دارند. معماهای بسیار زیبایی در این‌باره وجود دارند که این موضوع را برای دانش‌آموزان بسیار جذاب‌تر می‌کنند. خصوصاً آنکه الگوهایی متنوع و گاه همراه با شـــکل‌های هندسی وجود دارند که به شهود و کشف بیشتری نیاز دارند و این قوه را در دانش‌آموزان بارور می‌سازند. به چند نمونهٔ زیبا توجه کنید:

● به جای علامت سؤال، در نمودار زیر چه عددی باید قرار داد؟



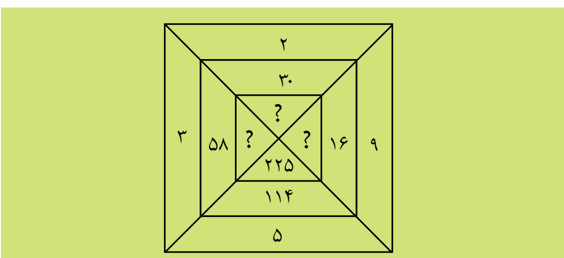
توضیح: هر عدد، مجموع مربعات رقم‌های عدد قبلی است!

● به جای علامت‌های سؤال چه عددهایی باید نوشت؟



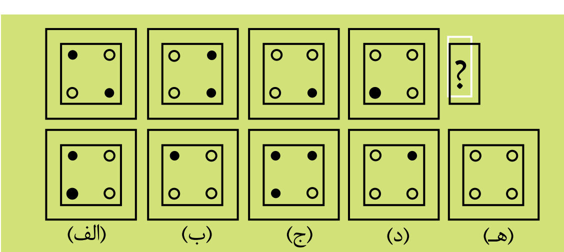
توضیح: آسان و دشوار است! به دنبالهٔ عددهای اول بیندیشید.

● به جای علامت‌های سؤال، کدام سه عدد را باید قرار داد؟



توضیح: از لایهٔ خارجی مربع و از عدد ۲ شروع کنید و با ضرب در ۲ و منهای ۱ (در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) حرکت کنید تا به عدد ۹ برســـید. سپس با ضرب در ۲ و منهای ۲، به ۱۶ برسید و ...

● به جای علامت سؤال، کدام مربع را قرار می‌دهید؟



توضیح: گزینهٔ (ب) صحیح است. دایره‌های کوچک در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنند.

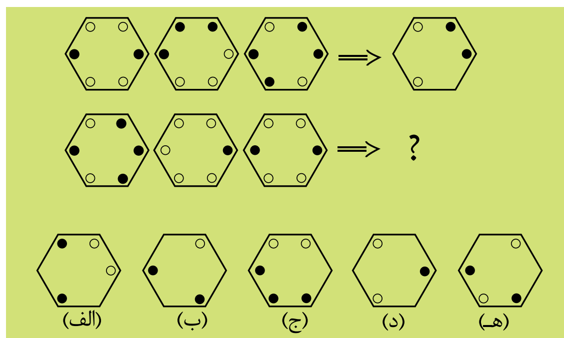
● در شکل زیر، در خانهٔ خالی مربع پنجم چه عددی باید قرار گیرد؟

۳	۴	۲	۸	۱	۹	۵	۶	۷	۹
۵	۷	۷	۹	۳	۶	۱۰	۲۰	۱۳	

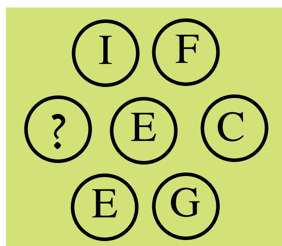
توضیح: در هر مربع قاعده‌ای ثابت، عددها را به هم مربوط می‌کند.
جواب: ۵۰
● در مربع زیر، به جای علامت سؤال چه رقمی باید قرار گیرد؟

۲	۸	۹
۳	۲	۴
۳	۶	?

توضیح: هر سطر را معادل یک عدد سه رقمی ببینید.
● در شـــکل زیر، به جای علامت سؤال کدام‌یک از گزینه‌های داده شده را قرار می‌دهید؟



● در دایرهٔ خالی شکل زیر، به جای علامت سؤال، کدام حرف الفبای انگلیسی باید قرار گیرد؟



۶. معماهای منطقی

معماهای منطقی شاهکارهای صنعت معماسازی هستند! زیرا ساده‌اند و به پیش‌نیازهای متعدد و اطلاعات و قضایای ریاضی محض نیاز ندارند. لذا امکان عمومی کردن آن‌ها وجود دارد و چالش با آن‌ها می‌تواند برای گروه‌های متفاوت مردم، نوجوانان و جوانان با هر سطح اطلاع و دانش ریاضی جذابیت داشته باشد. جایگاه معماهای منطقی از این حیث بسیار خاص و ویژه است و به همین دلیل ده‌ها و صدها جلد کتاب با این عنوان در کشـــورهای دنیا نوشـــته شده‌اند که در قسمت نخست این مقاله به آن‌ها اشاره کردیم. بنابراین، پاسخ‌گویی به این معماها تنها و تنها با تکیه بر استدلال و عقل سلیم ممکن است. در نتیجه می‌تـــوان راه‌حل آن‌ها را به نوجوانان و حتی دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی آموزش داد و از این رهگذر، آنان را با تفکر منطقی آشنا کرد و این به یقین به درک بهتر آن‌ها از ریاضیات هم منجر می‌شود.

باید اکیداً توصیه کنم که به هیچ روی نباید در این مســـیر به قالب‌های منطق صوری وارد شد و مانند آموزش قالبی و الگوریتمی ریاضیات، بکوشیم منطق ریاضی را هم برای نوجوانان فرموله کنیم و طرز مواجهه با مسائل منطقی را آموزش دهیم. بلکه باید سعی کنیم که منطق براســـاس «عقل سلیم» را رواج دهیم که در این صورت، هر کسی با اندک بضاعتی از استدلال، می‌تواند با این معماها چالش کند. با ذکر چند نمونهٔ زیبا که فقط با اســـتدلال منطقی قابل حل هستند (و در عین حال بعضی بسیار هم چالش‌برانگیزند) موضوع را روشن می‌کنیم:

● سه نفر، دو بینا و یک نابینا وارد اتاق تاریکی می‌شوند که در آن سه کلاه قرمز و دو کلاه آبی وجود دارد. هر یک به تصادف کلاهی بر سر می‌گذارند و از اتاق خارج می‌شوند. بیرون اتاق هیچ کس کلاه خودش را نمی‌بیند. اکنون بینای اول می‌گوید: «من نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است.» بینای دوم هم می‌گوید: «من هم نمی‌دانم کلاهم چه رنگی است.» اما نابینا می‌گوید: «من می‌دانم کلاهم چه رنگی است!» چگونه ممکن است؟

توضیح: نابینا چنین اســـتدلال می‌کند: «کلاه من قرمزرنگ است، زیرا اگر غیر از این باشد و کلاهم آبی‌رنگ باشد، در این صورت وقتی بینای اول گفت که نمی‌داند کلاهش چه رنگی است، بلافاصله نتیجه می‌شـــد که کلاه بینای دوم نمی‌تواند آبی باشد (زیرا در آن صورت با وجود دو کلاه آبی، بینای اول می‌توانست رنگ کلاهش را تشخیص دهد). ولی در این صورت بینای دوم می‌توانست به رنگ کلاهش برســـد (قرمز) ولی بینـــای دوم هم گفت رنگ کلاهش را نمی‌داند! پس رنگ کلاه من آبی نیست.»

● **علی**، **رضا**، **حسین** و **پرویز** چهار هم‌کلاسی هستند که دو تای آن‌ها با هم برادرند. آن‌ها جمله‌های زیر را گفتند:

علی: من دوست رضا یا برادر پرویزم.
رضا: اگر من دوست علی باشم، حسین برادر پرویز است.
حسین: من برادر پرویز نیستم یا رضا دوست پرویز است.
پرویز: من دوست رضا نیستم.

اگر بدانیم همهٔ جمله‌ها درست هستند، برادرها را مشخص کنید.

توضیح: پرویز می‌گوید که دوســـت رضا نیست، پس رضا هم دوست او نیست. اما حسین می‌گوید: من برادر پرویز نیستم، یا رضا دوست پرویز است. ولی رضا دوست پرویز نیست، پس حسین برادر پرویز نیســـت. اما رضا می‌گوید: اگر من دوست علی باشم، حسین برادر پرویز است (و حسین برادر پرویز نیست). پس رضا دوست علی نیست و در نتیجه علی هم دوست رضا نیست. ولی علی می‌گوید که دوست رضا یا برادر پرویز است و چون دوست رضا نیست، پس برادر پرویز است. بنابراین علی و پرویز برادر هم هستند.

● سه کارت روی میز به پشت قرار دارند و می‌دانیم طرح روی

آن‌ها زردرنگ، قرمزرنگ و سیاه‌رنگ است. پشت هر کدام جمله‌ای نوشته شده است که می‌دانیم، جملهٔ پشت کارت سیاه‌رنگ، نادرست، جملهٔ پشت کارت قرمزرنگ، درست و جملهٔ پشت کارت زردرنگ، درست یا نادرست است. جمله‌های پشت کارت‌ها چنین‌اند:

کارت اول: کارت سوم زردرنگ است.

کارت دوم: کارت اول سیاه‌رنگ است.

کارت سوم: این کارت زردرنگ است.

رنگ هر یک از سه کارت را مشخص کنید.

● **فرهاد** و **فرزاد** دو برادرند که یکی همواره راست‌گو و دیگری همواره دروغ‌گوست. از فرزاد پرسیدم: «اگر از فرهاد بپرسم که: آیا فرزاد دروغ‌گوست، چه جوابی می‌دهد؟» فرزاد گفت: «می‌گوید خیر». فرزاد راست‌گوست یا دروغ‌گو؟

● در یک جزیرهٔ عجیب، همه یا راست‌دست هستند و یا چپ‌دست. راست‌دست‌ها هرچه با دست راستشان بنویسند، راست است و هرچه با دست چپشان بنویسند، دروغ است. چپ‌دست‌ها برعکس‌اند؛ هرچه با دست چپشان بنویسند راست و هرچه با دست راستشان بنویسند، دروغ است. گردشگری به این جزیره آمد و متوجه نوشته‌ای روی یک دیوار شد و فوراً فهمید که آن را یک چپ‌دست نوشته است. آن چه جمله‌ای بود؟

و آخرین نمونه، یک نمونهٔ به راستی چالش‌برانگیز است:

● یکی از گوسفندان چوپان روستای «ناکجاآباد» دزدیده شده است! کدخدا و رئیس پاسگاه، چهار نفر مظنون به اسامی اکبر، بهرام، کیوان و داود را شناسایی کرده‌اند و برایشان معلوم شده که دزد گوسفند، یا جوان‌ترین مظنون و یا مسن‌ترین آن‌هاست. در عین حال، آن‌ها در بازجویی هرکدام سه جمله گفتند که مشخص شده، هر یک از آن‌ها فقط یک جمله درست گفته است. این‌ها جمله‌های گفته شده‌اند:

اکبر: ۱. بهرام مسن‌ترین ماست؛ ۲. جوان‌ترین ما مجرم است؛ ۳. کیوان بی‌گناه است.

بهرام: ۱. اکبر جوان‌ترین نیست؛ ۲. داود مجرم است؛ ۳. داود جوان‌ترین ماست.

کیوان: ۱. بین ما، اکبر جوان‌ترین است؛ ۲. من مسن‌ترین هستم. ۳. داود مجرم نیست.

داود: ۱. مسن‌ترین فرد بین ما، بی‌گناه است؛ ۲. بهرام مجرم است؛ ۳. من جوان‌ترین هستم.

دزد گوسفند، چه کسی است؟

در حال حاضر خوش‌بختانه منابع نسبتاً خوبی به زبان فارسی در زمینهٔ معماهای منطقی در سطوح متفاوت برای معرفی و استفاده وجود دارند که از جمله می‌توان به کتاب‌های «معماهایی در منطق ریاضی» و «معماهای شهرزاد»، از انتشارات فاطمی و «آلیس در سرزمین معما» از انتشارات مبتکران و هر سه نوشتهٔ پازلیست نامدار آمریکایی، **ریموند اسمالین**، اشاره کرد.

در انتها بی‌مناسبت نیست که به کارهای استاد جوان ریاضی کشورمان، دکتر **مجید میرزاوزیری** نیز به‌خصوص در زمینهٔ معماهای منطقی اشاره‌ای داشته باشیم. ایشان که از مروجین و پیشگامان ریاضیات شاد در کشورمان (و به‌طور خاص در شهر مشهد) است، علاوه بر تألیف کتاب‌هایی در زمینهٔ معماها و (به‌خصوص معماهای منطقی)، همچون: «یادگیری ریاضی از طریق معمابازی»، «گذشته‌ای که می‌آید»، «قتل در فانوس دریایی»، «داو دوم» و «اشتباه سوزن‌بان»، با آموزش میدانی دانش‌آموزان و برگزاری اردوهای شاد ریاضی و تأسیس شهر ریاضی در مشهد، خدمات شایسته‌ای به ترویج ریاضیات شاد در کشورمان انجام داده است.

علاوه بر آن، ایشان را می‌توان مبتکر تألیف و نگارش داستان‌هایی با تم ریاضی در فرهنگ کشورمان دانست که از حدود ۳۰ سال قبل تاکنون با ادبیاتی شیوا و هنرمندانه، به ترویج ریاضیات و منطق از طریق داستان‌نویسی روی آورده است. اطلاعات کامل‌تر از کارهای ایشان از طریق رجوع به مصاحبهٔ این‌جانب با ایشان در ماهنامهٔ ریاضی برهان متوسطه دوم (شمارهٔ ۱۱۰، اردیبهشت ۱۳۹۷) به دست می‌آید.

ج. سفسطه‌ها و پارادوکس‌ها

دربارهٔ سفسطه و پارادوکس و تفاوت‌های آن‌ها مطالب زیادی گفته شده است و خوانندگان برای اطلاع دقیق‌تر دربارهٔ آن‌ها می‌توانند به بخش یازدهم از جلد دوم کتاب «ریاضی شاد» از این‌جانب مراجعه کنند. اما به‌طور خلاصه می‌توان گفت که پارادوکس (باطل‌نما) معرف وجود نوعی تناقض ساختاری در ارائهٔ یک تعریف در ریاضیات است و برای رفع آن، چاره‌ای جز تجدید نظر در تعریف‌های اولیه نیست.

اما سفسطه نوعی تناقض کاذب و فریبنده است که با زیر پا گذاشتن قواعد ریاضیات، از طریق فریب دادن مخاطب، ایجاد می‌شود و می‌توان با دقت، این اشتباه یا سفسطه را تشخیص داد. چالش با سفسطه‌ها برای آموزش ریاضی بسیار مفید است، چرا که خلاقیت، ریزبینی و دقت دانش‌آموزان را به شکل اعجاب‌انگیزی افزایش می‌دهد. اما متأسفانه این موضوع در آموزش ریاضی کشورمان به شدت مورد غفلت قرار گرفته است و تنها موارد اندکی از آن در کتاب‌های درسی برخی از سال‌ها دیده شده‌اند؛ نمونه‌های ساده‌ای در بحث اتحادهای جبری و معادله‌ها، شبیه این نمونه:

● ثابت می‌کنیم همهٔ عددهای حقیقی مساوی صفر هستند!

فرض کنیم دو عدد حقیقی a و b با هم مساوی باشند، در این صورت می‌توان نوشت:

$$a = b \overset{\times ۲b}{\Rightarrow} ۲ab = ۲b^۲ \Rightarrow -b^۲ = -۲ab + b^۲$$
$$\Rightarrow a^۲ - b^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$
$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = (a-b)^۲$$
$$\Rightarrow a + b = a - b \Rightarrow b = -b \Rightarrow ۲b = ۰$$
$$\Rightarrow b = ۰ \Rightarrow a = b = ۰$$

کشف ایراد استدلال فوق بسیار آسان است، ولی همیشه این‌طور نیست. به این نمونه از بحث احتمال توجه کنید:

● سه جعبهٔ A، B و C داریم و می‌دانیم در یکی از آن‌ها سکه‌ای وجود دارد و دو جعبهٔ دیگر خالی هستند. اکنون اگر دست در جعبهٔ A کنیم، چقدر احتمال دارد سکه را بیابیم؟ بدیهی است که می‌گویید: $\frac{۱}{۳}$. اما حالا فرض کنید به شما گفته شده که جعبهٔ B خالی است. در این صورت چقدر احتمال دارد که سکه در جعبهٔ A باشد؟ روشن است که در این حالت سکه در جعبهٔ A یا در جعبهٔ C است. پس احتمال آنکه در جعبهٔ A باشد، $\frac{۱}{۲}$ است. همچنین فرض کنید که بدانید جعبهٔ C خالی است. باز هم با استدلالی مشابه، احتمال آنکه سکه در جعبهٔ A باشد، مساوی $\frac{۱}{۲}$ است.

بنابراین اگر بدانیم جعبهٔ B خالی است، یا بدانیم جعبهٔ C خالی است، در هر حال احتمال آنکه سکه در جعبهٔ A باشد، $\frac{۱}{۲}$ است. اما واضح است که یکی از این دو جعبه خالی هستند. پس احتمال آنکه سکه در جعبهٔ A باشد، $\frac{۱}{۲}$ است نه $\frac{۱}{۳}$!

آیا می‌توانید سفسطهٔ این استدلال را مشخص کنید؟

همان‌گونه که می‌بینید، توضیح و کشف سفسطه‌ها می‌تواند برای دانش‌آموزان بسیار آموزنده و زیر و بم مباحث گوناگون ریاضی را برای آن‌ها روشن کند. به‌خصوص دسته‌ای از سفسطه‌های استدلال‌های هندسی بسیار زیبا هستند و برای آشنایی با آن‌ها، شما را به کتاب معروف «اشتباه استدلال‌های هندسی»، از زنده‌یاد **پرویز شهریاری** ارجاع می‌دهم.

اما آشنایی با پارادوکس‌های معروف، مانند «پارادوکس راسل» نیز برای دانش‌آموزان می‌تواند بسیار آموزنده و جذاب باشد. به یک نمونه از «معادل»های پارادوکس راسل، «پارادوکس وکیل و دانشجو» اشاره می‌کنیم:

● یک دانشجوی رشتهٔ حقوق برای کارآموزی پیش یک وکیل دادگستری رفت و قراردادی با او امضا کرد که براساس آن، دانشجو فقط در صورتی حق‌الزحمهٔ وکیل را بپردازد که پس از پایان کارآموزی، یعنی هم‌زمان با پایان تحصیلات او و گرفتن پروانهٔ وکالت، در اولین محکمه‌ای که شرکت کرد، دادگاه به نفع وی حکم دهد.

اما دانشجو پس از پایان تحصیلات شغل وکالت را انتخاب نکرد و به دنبال کار دیگری رفت. وکیل برای گرفتن حق‌الزحمه‌اش، از او به دادگاه شکایت کرد. حالا در دادگاه قاضی باید به نفع چه کسی حکم بدهد؟! اگر به نفع دانشجو حکم دهد، او نباید حق‌الزحمه را بدهد. ولی از طرف دیگر، طبق قرارداد باید حق‌الزحمه را بدهد! اما اگر به ضرر او حکم دهد و او را مجبور به دادن حق‌الزحمه کند، طبق قرارداد نباید حق‌الزحمه را بدهد!

این یک پارادوکس واقعی است که از ابهام در قرارداد ناشی شده است. آشنایی با این پارادوکس‌ها، یادگیری ریاضی را جذاب‌تر می‌کند و اهمیت مفاهیم اولیه و تعریف‌ها را هم روشن‌تر می‌سازد. به‌ویژه که دانش‌آموزان را با مباحث فلسفهٔ ریاضی آشنا می‌کند. برای آشنایی با برخی پارادوکس‌ها می‌توانید به هشت مقالهٔ پیاپی در مجلهٔ برهان متوسطهٔ اول، دورهٔ ۹۹ ـ ۱۳۹۸، نوشتهٔ **شراره تقی‌دستجردی** مراجعه کنید.

د. بازی‌ها و سرگرمی‌های ریاضی

بازی‌های ریاضی تأثیری استثنایی در گرایش بیشتر دانش‌آموزان به ریاضیات دارند و نگارنده این را به عینه و به تجربهٔ شخصی دریافته است. بازی‌های ریاضی انواع بسیاری دارند. دو نفره، چند نفره (کلاسی) و یا یک نفره و گاه به‌صورت ارائهٔ تردستی از طرف معلم. متأسفم که فضای این مقاله اجازهٔ طرح انواع زیادی از آن‌ها را نمی‌دهد و امیدوارم در شماره‌های آتی مجله با همکاری خوانندگان، مقالاتی مستقل در این‌باره ارائه شود. خوانندگان می‌توانند با مراجعه به کتاب‌های موجود در این زمینه، نمونه‌هایی از این بازی‌ها را ملاحظه کنند. همچنین هشت مقالهٔ متوالی این‌جانب در مجلهٔ ریاضی برهان متوسطهٔ اول، دورهٔ ۹۶ ـ ۱۳۹۵ با عنوان «ماجراهای عمو ریاضی» نیز قابل ارجاع هستند. در اینجا فقط به یک نمونهٔ بسیار زیبا از آن‌ها که قدمتی تقریباً ۴۰۰ ساله دارد، یعنی «بازی ساعت دیواری»، اشاره می‌کنم:

این تردستی یا بازی توسط معلم و فقط با یک ساعت دیواری قابل اجراست. معلم ساعت دیواری را رو به بچه‌ها می‌گیرد و از یکی از دانش‌آموزان می‌خواهد، یکی از شماره‌های روی آن را در ذهنش انتخاب کند. سپس با هر یک ضربه‌ای که معلم با انگشت خود روی صفحه می‌زند، شمارهٔ مزبور را یک واحد افزایش دهد. وقتی هم به شمارهٔ ۲۰ رسید، دستور توقف ضربه زدن را به معلم بدهد. با کمال تعجب خواهد دید که انگشت معلم روی همان شماره‌ای است که او در ذهن خود داشته است.

شیوهٔ عمل معلم به این صورت است که هفت ضربهٔ نخست خود را به‌صورت تصادفی می‌زند، ولی از ضربهٔ هشتم به بعد را روی شمارهٔ ۱۲، ۱۱، ۱۰ و... می‌زند. در این صورت، وقتی دانش‌آموز دستور توقف می‌دهد، انگشت معلم روی شماره‌ای است که او در ذهن داشته است. منطق ریاضی نهفته در این تردستی که بعداً توسط معلم و به کمک دانش‌آموزان توضیح داده می‌شود، یک آموزش خالص ریاضی است و ای کاش در کتاب‌های درسی هم انواعی از این بازی‌ها جای ثابتی داشتند.

این نوشتار را به امید اثرگذاری بر متولیان آموزش ریاضی کشورمان در اینجا به پایان می‌برم. با تأکید مجدد بر اینکه «ریاضیات شاد» یک فرهنگ آموزش ریاضی است و نه مجموعه‌ای از سرگرمی‌ها و تفریحاتی برای اوقات فراغت و مانند **مارتین گاردنر** معتقدم باید آموزش ریاضی بر بستر آن بنا شود.

پی‌نوشت‌ها

1. J.E.Littlewood
2. Anti Commutative
3. Two Parted Graph